有理楕円曲面における或る種の双有理変換(代数幾何学とホッジ理論)

藤本, 圭男

数理解析研究所講究録
803巻 1992年 137-140

有理楕円曲面における或る種の双有理変換

静岡大理　藤本圭男　(Yoshio Fujimoto)

sectionをもつ相対的極小な有理楕円曲面が$\mathbb{P}^2$の9点ブローアップであり，$\mathbb{P}^2$の3次曲線のpencilから構成できる事はよく知られている。これに或る種の双有理変換を施して，重複ファイバーを持つ有理楕円曲面を構成する事を目標とする。

重複ファイバーを持つ有理楕円曲面は，sectionを持つ場合と比較して余り知られていない様だ。主な理由は$\mathbb{P}^2$の9点ブローアップであるにかかわらず，特異点を許す$\mathbb{P}^2$の曲線のpencil を扱かう為，構成が面倒なこと，或いは重複ファイバーが唯1本故，(log 変換によらない) 分岐被覆を用いる構成が困難な事による。

しかし，永田先生の"rational surface I.II." において，無限個の(−1)−曲線を含む代数曲面の構成の際，用いられたvirtual linear System (i.e. $\mathbb{P}^2$の指定された何点かで，与えられた重複度の特異点をもつ曲線のlinear system) の一部として，

上記の"Halphen" linear pencilは既に何度も登場している。又、広中・松村"Formal functions and formal embeddings"のRemark (5.1.2.)でも、以下の命題1と関連した事実が述べられていた。

尚、ここで扱かう双有理変換は、Harbourne & Lang (Trans. 1988)が"Halphen transform"と呼んでいるものの一部と本質的に同等である。以下で構成する重複ファイバーをもつ有理楕円曲面は、$\mathbb{P}^2$の9点ブローアップとみた際、blow-upの中心は必然的にinfinitely near pointを含む。故に、'Halphen' pencilより更に退化した$\mathbb{P}^2$の曲線のpencilが登場する。

命題1. Cを$\mathbb{P}^2$の非特異3次曲線とし、Cの変曲点Qを1つ固定する。CにQを単位元とするアーベル群の構造を入れ、群演算を$\pm$で記す。今、C上に9点$P_1, \cdots, P_9$ (infinitely near pointも許す)をとり、$\mathbb{P}^2$を9点P_i $(1 \leq i \leq 9)$でblow-upして得られた曲面をSとおく。この時、Sが有理楕円曲面の構造を持つ為の必要十分条件は、$P_1 + \cdots + P_9 \in C$が位数有限(mとおく)になることである。更に次のいずれかが成り立つ。

A) $m = 1$ならばSはsectionをもつ。

B) $m > 1$ならば、Sは重複度mの重複ファイバーを唯1本、持つ。

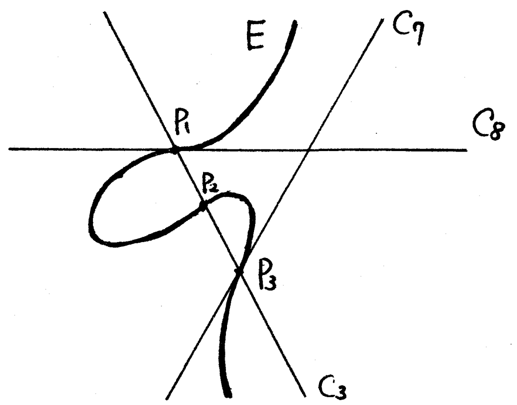
elliptic fibrationは共に、$\exists |-mK_S|$で一意的に与えられる。

命題1の証明は、楕円曲面の標準因子公式とAbelの定理から従がう。次に命題1からの直接の帰結として、標題の双有理変換を定義する。

<u>命題2.</u>　$\varphi: S \to \mathbb{P}^1$ をsectionを持つ相対的極小な有理楕円曲面、2個のsection $s_i\ (i=1,2)$ でその差 $s_1 - s_2$ がtorsion section（位数 m）と仮定する。次に φ の正則ファイバー f を任意にとり、(-1)曲線 s_2 をblow-downし、一点 $P := s_1 \cap f$ をblow-upして曲面 X を得る。この時、$\bar{f}$ を f のproper transformとすると、$\Phi_{|m\bar{f}|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は唯1本の重複ファイバー $m\bar{f}$ を許す有理楕円曲面になる。

<u>注</u>　s_1 のproper transform $\bar{s}_1$ は、$\Phi_{|m\bar{f}|}: X \to \mathbb{P}^1$ の特異ファイバーの既約成分に変身する。

<u>例</u>　E を $\mathbb{P}^2$ の非特異3次曲線，$P_1, P_3 \in E$ は変曲点．C_8, C_7 を各々 P_1, P_3 における接線とする。



E と $C_3+C_7+C_8$ により生成される $\mathbb{P}^2$ の3次曲線のpencil をLとする。有理写像 $\Phi_{|L|}:\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ の不確定点を $\mathbb{P}^2$ の9点ブローアップで解消して、section をもつ有理楕円曲面 S を得る。容易な計算より、S の Mordell-Weil 群は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と同型で、$\{e_i,\ 1\le i\le 3\}$ より成る。(c.f. 下図)

S を1点 $P_2=E'\cap e_2$ で blow-up し、e_1 を blow-down して、新たに X を得る。$\Phi_{|3\bar{E}|}: X\to\mathbb{P}^1$ により X は重複度3の重複ファイバー $3\bar{E}$ を唯1本持つ有理楕円曲面となる。この際、S の I_9-型特異ファイバーは、X の II^*-型特異ファイバーに変身する。

3E と $6C_3+2C_7+C_8$ とで生成される $\mathbb{P}^2$ の9次曲線の pencil を L' とおく。有理写像 $\Phi_{|L'|}:\mathbb{P}^2\dashrightarrow\mathbb{P}^1$ の不確定点を、$\mathbb{P}^2$ の9点ブローアップで解消して、X を得る。